

# ÉPARGNE RETRAITE STRATÉGIES D'ALLOCATION ET DYNAMIQUE DES MARCHÉS FINANCIERS<sup>1</sup>

**Stéphane Hamayon, Yannick Pradat**

*Harvest*

**Florence Legros**

*ICN Business School*

---

La loi PACTE du 22 mai 2019 vise à orienter l'épargne vers des placements longs productifs en favorisant l'essor de l'épargne retraite. Elle aspire conjointement à modifier la ligne de partage entre répartition et capitalisation. Cette disposition pose deux questions. Celle de l'impact de la capitalisation sur la croissance et celle de la dynamique que l'on prête aux actifs risqués. Cet article est centré sur la mesure du risque associée à l'utilisation des revenus du capital pour financer les retraites et examine la question centrale de l'utilité que les agents peuvent retirer de leur abondement au fonds d'épargne. Les résultats des simulations réalisées dans le cadre démo-économique français montrent que si le prix des actifs risqués suit une marche aléatoire (EMH), les agents averseurs au risque ne pourront pas obtenir sur les marchés un ratio « rendement/risque » équivalent à celui procuré implicitement par l'édifice des régimes par répartition. En revanche si les chocs sur les marchés boursiers ont un caractère transitoire, alors le marché financier pourrait concurrencer les régimes par répartition au prix d'un investissement massif en actifs risqués en début et milieu de vie active.

*Mots clés* : épargne retraite, croissance endogène, Time Dependent O-U Process, TRI.

---

---

1. Les auteurs remercient Vincent Touzé et les deux relecteurs anonymes pour leurs critiques constructives qui ont permis d'améliorer cette contribution.

De façon générale, il y a deux sources sur lesquelles peuvent être prélevées les retraites : le revenu des actifs et les revenus du capital. En théorie aucune des deux techniques ne présente de supériorité intrinsèque mais chacune présente une sensibilité différente aux principaux risques auxquels les régimes de retraites sont exposés. Le débat sur l'avenir des retraites en France divise généralement les défenseurs de la répartition pure des adeptes d'une transition vers des systèmes mixant répartition et capitalisation. Dans la controverse qui les oppose, les tenants des deux camps recourent à un certain nombre de bons et de mauvais arguments pour défendre leur position.

Au sujet de la capitalisation, des doutes récurrents sont souvent émis sur la variance de son rendement dans le temps. L'objectif de cet article est d'analyser les fondements d'un tel argument, d'apprécier s'ils sont justifiés ou s'ils font partie des mythes entretenus. À l'heure où la loi PACTE<sup>2</sup> contient plusieurs mesures destinées à renforcer l'épargne retraite des Français, un éclairage sur la modélisation du cours des actions s'impose car la dynamique que l'on prête aux prix des actifs risqués a des conséquences majeures sur la structure et la performance des allocations stratégiques au cours du temps.

La première partie de cet article décrit les étapes de la modélisation du risque de marché, tandis que la seconde se focalise sur la comparaison des rendements de la répartition et de la capitalisation dans le cadre démo-économique français. À cet égard, les simulations réalisées déterminent des conclusions pour le moins contrastées. Elles montrent que si le prix des actifs risqués suit une marche aléatoire, les agents averse au risque ne pourraient pas obtenir sur les marchés un ratio « rendement/risque » équivalent à celui procuré implicitement par l'édifice des régimes par répartition du secteur privé. Les enseignements sont notablement différents dans l'hypothèse où les cours sont caractérisés par un processus de retour vers la moyenne sur les horizons longs et ce d'autant plus que des mécanismes de croissance endogène sont à l'œuvre dans les pays développés. Les épargnants plus risquophiles obtiendraient des rentes plus élevées caractérisées par une dispersion accrue.

---

2. Plan d'Action pour la Croissance et la Transformation des Entreprises (PACTE).

## 1. L'introduction du risque de marché dans un modèle démo-économique à deux classes d'agents

Dans le cas, vraisemblable, d'une transition progressive vers un État-providence « sélectif<sup>3</sup> » où les prestations seraient ciblées sur les besoins des salariés les moins qualifiés, les ménages aisés pourraient être conduits à assurer la gestion de leur épargne financière dans l'objectif de se constituer un complément de retraite significatif. Dans un modèle de cycle de vie sans contrainte de liquidité, on imagine *a priori* que les jeunes actifs qualifiés devraient participer fortement aux marchés actions. On sait toutefois que ce n'est pas le cas et que les ménages détiennent trop peu d'actifs risqués compte tenu de leur aversion au risque. Arrondel et Masson (2017) invoquent qu'une des raisons possibles pour expliquer l'« *Equity Premium Puzzle* » est que le risque boursier serait corrélé, positivement, avec les autres risques que supporte l'épargnant. Par ailleurs, les règles qui président à l'entendement des informations sont des règles contingentes à l'état de l'environnement dans lequel se trouve l'individu. De ce fait, on peut légitimement se demander si les doutes émis sur le rendement des systèmes par épargne n'ont pas contribué à détourner les ménages des retraites par capitalisation. Afin de vérifier cette acception, nous développons une modélisation simplifiée de la dynamique du cours stochastique d'un actif risqué qui s'appuie sur une dynamique de taux de rendement simulée à l'aide d'un modèle démo-économique déterministe.

### 1.1. Le modèle démo-économique déterministe

Les outils ayant pour vocation l'analyse de conséquences macro-économiques du vieillissement démographique se distinguent les uns des autres par la nature des variables exogènes qu'ils utilisent ou, dit autrement, par les choix effectués concernant l'endogénéité de chaque variable. À cet égard, les modèles d'équilibre général calculable à générations imbriquées (MEGCGI), popularisés par les travaux de Auerbach et Kotlikoff (1987), proposent des modélisations extrêmement fines cherchant à endogénéiser au maximum les réactions aux changements démo-économiques à long terme. Les MEGCGI, dont Le Cacheux et Touzé (2002) listent les principaux enseignements, notamment en matière de retraite, reposent généralement sur des hypothèses

---

3. À ce sujet, on lira avec profit Dufourcq (1994). Dans « L'État-providence sélectif », l'auteur évalue avec clairvoyance les difficultés « politiques » d'une réforme de la protection sociale.

d'équilibre parfait de tous les marchés et de comportement fortement rationnel des agents. La maquette partiellement endogénéisée présentée dans cet article est d'une complexité intermédiaire par rapport à cette classe de modèles.

### 1.1.1. Une fonction de production CES à rendements constants

Le modèle démo-économique, qui s'inspire de la structure du modèle de Blanchet (1992), est composé d'une fonction de production à deux facteurs et d'une équation décrivant le marché du travail où le chômage possède une composante structurelle et une composante conjoncturelle. Le modèle ignore les phénomènes cycliques temporaires et les contraintes de demande sur le long terme. La fonction de production de référence est de type CES :

$$y_t = A[\alpha K_t^{-\gamma} + \beta((1+g)^{t-t_0} L_t)^{-\gamma}]^{-1/\gamma} \quad (1.1)$$

Tableau 1. Paramètres de la fonction de production CES

<b>Y</b>	Produit total	
<b>L</b>	Population employée	
<b>K</b>	Capital total	
<b>A</b>	A est un paramètres d'échelle	A et $\alpha$ sont déterminés pour être compatibles avec $K/Y$ exogène = 3.
<b><math>\alpha = 0,33</math></b>	Fonction de la répartition des revenus entre travail et capital	
<b><math>\beta = 0,67</math></b>	$(1 - \alpha)$	
<b><math>s = 1</math></b>	Élasticité de substitution $s = 1/(1 + \gamma)$	
<b><math>\gamma \uparrow 0</math></b>	Lorsque $\gamma$ tend vers 0 on utilise une fonction Cobb-Douglas	
<b><math>g = 1,5 \%</math></b>	Progrès technique exogène	La croissance de Y converge vers $(n + g)$

### 1.1.2. L'introduction d'une fonction de croissance endogène

Concernant le choix de la fonction de production endogène, l'analyse des différents modèles nous a conduit à retenir un modèle d'apprentissage par la pratique où l'accumulation des connaissances dépend du stock de capital agrégé<sup>4</sup>, augmenté d'un progrès technique exogène. Cette spécification présente deux intérêts :

- Les nouvelles connaissances sont directement engendrées par l'accroissement du capital du stock de capital par tête<sup>5</sup> au niveau

4. Cf. Arrow (1962) et Romer (1986).

agrégé. Cette modification permet de faire disparaître l'effet d'échelle ;

- L'introduction d'un progrès technique exogène, même s'il réduit le caractère endogène de la croissance, permet de capturer les facteurs qui, outre les effets de diffusion, ont une influence sur le taux de croissance à long terme.

Au niveau microéconomique (l'indice  $i$  représentant la firme  $i$ ), la fonction de production s'écrit :  $y_{i,t} = k_{i,t}^\alpha \cdot (A_t \cdot l_{i,t})^{1-\alpha}$  où  $l_i$  et  $k_i$  sont les facteurs de production habituels. Comme on suppose que les connaissances dépendent du stock de capital agrégé et que ces connaissances sont un bien commun à l'ensemble des firmes, on a :  $A_t = B e^{gt} \cdot K_t^\phi$  avec  $B$  et  $\phi$  des constantes positives et  $g$  le progrès technique exogène. La fonction de production devient :  $y_{i,t} = k_{i,t}^\alpha \cdot (B e^{gt} \cdot K_t^\phi \cdot l_{i,t})^{1-\alpha}$  et au niveau macroéconomique :

$$Y_t = B^{1-\alpha} e^{g(1-\alpha)t} K_t^{\alpha+\phi(1-\alpha)} L_t^{1-\alpha} \quad (1.2)$$

La croissance  $\dot{Y}/Y$  converge alors vers  $n + g / (1 - \phi)$  où la variable  $n$  désigne le taux de croissance démographique.

Tableau 2. Paramètres de la fonction de production endogène\*

$B$	$B$ est un paramètre d'échelle	$B$ et $\phi$ sont déterminés pour être compatibles avec $K/Y$ exogène = 3.
$\alpha = 0,33$	Fonction de la répartition des revenus entre le travail et le capital	
$\phi = 0,5$	Élasticité de la production à la « connaissance » (stock de capital)	Modèle d'apprentissage par la pratique
$g = 0,75\%$	Progrès technique exogène dans le modèle endogène.	La croissance de $Y$ converge vers $n + g / (1 - \phi)$

\* Les paramètres non mentionnés sont identiques à ceux de la fonction CES.

Les paramètres communs aux deux fonctions de production utilisées dans les simulations sont listés ci-dessous.

Tableau 3. Paramètres et variables communs à toutes les projections

$\delta c = 1/18$	Taux de dépréciation du capital	
$sv = 0,70$	Taux d'épargne des capitalistes	$sv = 1$ est la valeur de règle d'or
$\lambda = 0,1$	Paramètre reflétant la « viscosité » du marché du travail	Si $\lambda \uparrow 0$ les salaires sont rigides à la baisse

5. L'introduction de  $K/L$  en lieu et place de  $K$  permet de supprimer l'effet d'échelle.

### 1.1.3. Salaire, marché du travail et rendement du capital d'équilibre

Conformément au programme de maximisation du profit des entreprises, à l'équilibre, la rémunération de chaque facteur devrait être égale à sa productivité marginale. On a donc, en notant  $w^*$  le salaire d'équilibre de plein-emploi correspondant une population employée  $L^*$ <sup>6</sup>.

Dans le modèle de croissance exogène, le salaire d'équilibre de plein-emploi  $w^*$  est :

$$w_{(t)}^* = \frac{\beta(1+g)^{(t-t_0)}}{A^\gamma} \left( \frac{Y}{(1+g)^{(t-t_0)} \cdot L^*} \right)^{1+\gamma} \quad (1.3)$$

Dans le cadre d'une croissance endogène, l'équation est modifiée et devient :

$$w_{(t)}^* = (1 - \alpha)[Be^{gt}]^{(1-\alpha)} K^{\alpha+\phi(1-\alpha)} L^{-\alpha} \quad (1.4)$$

On suppose que le salaire effectif diffère du salaire d'équilibre en raison de rigidités qui conduisent à des délais d'ajustement. Pour tenir compte de ces délais, on définit le salaire effectif en  $t$  comme une moyenne pondérée du salaire d'équilibre en  $t$  et du salaire effectif en  $t - 1$ .

$$w_t = \max[1 - \lambda] \times (1 + g) \times w_{(t-1)} + \lambda \times w_t^*; w_t^* \quad (1.5)$$

avec :

$w_t$  : salaire effectif

$w^*$  : salaire d'équilibre de plein-emploi

$\lambda$  : paramètre d'ajustement reflétant la rigidité du marché du travail.

La productivité marginale du capital correspond au rendement brut du capital. En notant respectivement  $r_g$  le rendement brut du capital,  $r_n$  le rendement net, et  $\delta c$  le taux de dépréciation du capital, on obtient avec le modèle de croissance exogène :

$$r_{g(t)} = (r_n + \delta c) = \frac{\alpha}{A^\gamma} \left( \frac{Y}{K} \right)^{1+\gamma} \quad (1.6)$$

et

$$r_{g(t)} = (r_n + \delta c) = \alpha [Be^{gt}]^{(1-\alpha)} K^{(1-\alpha)(\phi-1)} L^{1-\alpha} \quad (1.7)$$

avec le modèle de croissance endogène.

6. On a  $L^*/N = 1 - u_0$ , avec  $N$  la population active et  $u_0$  le taux de chômage structurel. L'équilibre de plein-emploi est celui compatible avec le taux de chômage structurel.

On en déduit le rendement net du capital  $r_n = (r_g - \delta c)$  qui correspond au rendement auquel les ménages pourront accéder pour se constituer un complément de retraite par épargne.

#### 1.1.4. Stock de capital

Le modèle considère deux classes d'individus. D'une part les « capitalistes » ou « héritiers » qui accumulent de l'épargne dynastique et d'autre part les salariés qui épargnent en fonction de leur anticipation sur le rendement des régimes par répartition. Corrélativement une différence est faite entre le stock de capital « structurel » ( $K_s$ ) et le capital productif destiné à la retraite ( $K_r$ ). Le capital total ( $K$ ) en ( $t$ ) est donné par :

$$K(t) = K_s(t) + \sum_{a=20}^r K_r(a, t) \quad (1.8)$$

où  $a$  et  $r$  sont respectivement les âges en activité et à la retraite.

##### ■ Capital structurel

Le stock de capital structurel est déterminé par l'équation d'accumulation suivante :

$$K_{s(t+1)} = K_{s(t)}(1 - \delta c + s v \cdot r_{g(t)}) \quad (1.9)$$

$K_s$  = capital structurel ;

$\delta c$  = taux de dépréciation ;

$s v$  = proportion du revenu brut du capital réinvesti.

Le comportement d'épargne des « capitalistes » consiste donc à réinvestir une part constante ( $s v$ ) du revenu brut du capital. Les différentes valeurs du taux d'épargne de cette classe d'agents permettent de jouer sur les rendements du capital en se plaçant de manière déterministe dans un contexte de « règle d'or » ou de « sous-accumulation ».

##### ■ Capital retraite

Au sujet du capital retraite, on suppose que les salariés d'âge ( $a$ ) de sexe ( $s$ ) en ( $t$ ) dirigent vers un fonds une fraction  $\theta$  de leur salaire brut courant  $w_{(s,a,t)}$ . Le capital retraite est individualisé par génération et est consommé progressivement après l'âge de la retraite, pour revenir à zéro lorsque le dernier représentant de la génération disparaît. Si on note  $p_k$  les rentes attribuées par le fonds (cf. *infra* équation 1.11), la dynamique du capital retraite peut se résumer comme suit :

si ( $a$ ) < âge de la retraite ( $r$ )

$$\begin{aligned} \text{Kr}_{(s,a,t)} &= \text{Kr}_{(s,a-1,t-1)} \times (1+r_{n(t)}) + \\ &(\widehat{ar}_{(s,a,t)} \times (1-u_{s,a,t}) \times P_{(s,a,t)}) \times \theta_f \times w_{(s,a,t)} \end{aligned} \quad (1.10a)$$

sinon

$$\text{Kr}_{(s,a,t)} = \text{Kr}_{(s,a-1,t-1)} \times (1+tec) - (P_{(s,a,t)} \times pk_{(s,a,t)}) \quad (1.10b)$$

Avec :

$\text{Kr}$  = stock de capital retraite ;

$\theta_f$  = % du salaire brut consacré à l'épargne retraite ;

$pk$  = rentes attribuées par le fonds ;

$\widehat{ar}$  = taux d'activité salarié ;

$P$  = population totale ;

$u$  = taux de chômage ;

$tec$  = taux d'intérêt technique.

Afin de traduire la réalité fonctionnelle des marchés, nous faisons l'hypothèse forte qu'au moment de la conversion du capital en rente, le capital productif risqué est intégralement converti en support de « stockage » de rendement réel nul pour sécuriser les rentes (*cf. infra* point 2.2.1). Par conséquent, au moment de la conversion du capital en rente, on considère que les engagements du fonds de retraite, à l'égard des assurés, ne sont pas réintégrés dans le stock de capital productif. Seul le capital accumulé par les salariés pendant la phase d'épargne est additionné au capital structurel.

■ Calcul des rentes du fonds de retraite

$$pk_{(s,r,t)} = \frac{\text{Kr}_{(s,r,t)}}{P_{(s,r,t)} \times \sum_{i=r}^{\omega} \frac{l_{(r+(i-r))}}{l_r} \times \frac{1}{(1+tec)^{(i-r)}}} \quad (1.11)$$

avec :

$pk$  = rentes attribuées par le fonds à l'âge  $r$  (avec  $r \geq$  âge retraite) ;

$kr$  = capital retraite à convertir en rente ;

$l_r$  = nombre de survivants à l'âge  $r$  ;

$tec$  = taux d'intérêt technique ;

$z$  = âge limite de la vie biologique.

Les travaux pionniers de Blanchet (*infra*) ont largement contribué à tracer la carte des risques en évaluant la sensibilité du rendement du capital au choc démographique en utilisant un modèle cambridgien à deux classes d'épargnants. L'exercice reste toutefois perfectible car il n'intègre pas le risque de marché (ou risque systématique), qui peut



représenter un péril pour le financement des retraites. Dans ce type de maquette, l'accumulation du capital est fonction de sa productivité marginale, dont on déduit le rendement net à partir du taux de dépréciation du capital  $\delta c$ . Bien qu'il soit sensible à la croissance du capital par tête, le rendement du capital physique reste relativement inerte dans ce type de modèle. On le devine, l'introduction d'un stock de capital caractérisé par une forte variance n'est pas compatible avec ce type de bouclage. Afin d'intégrer le risque lié à l'imperfection des marchés nous avons simulé une espérance de rendement « bruitée » dont la valeur est fonction d'une composante stochastique stationnaire et de l'écart à une cible de long terme déterminée<sup>7</sup> par  $\delta t \int_{j=0}^{N-1} r_{nj}$  où  $r_n$  est la productivité marginale du capital issue du bouclage démo-économique. Le stock de capital « volatil » alimenté par les flux d'épargne investis sur l'actif censé refléter le risque de marché n'interfère pas dans le bouclage. Il permet d'assurer une cohérence entre le rendement macroéconomique et les couples « rendement – risque » qui déterminent l'accumulation du capital dans le plan d'épargne retraite.

## 1.2. La dynamique stochastique du prix de l'actif risqué

Du fait des imperfections du cycle économique, c'est-à-dire l'irrégularité de sa périodicité et la dissymétrie de ses phases, l'évolution du prix des actifs n'est pas linéaire. Afin d'en tenir compte, la dynamique stylisée des prix des actifs risqués est approchée par une spécification de type « *Time dependent Ornstein-Uhlenbeck process* <sup>8</sup> ». Soit  $P_t$  : le prix d'un actif risqué (on pose  $P_0 = 1$ , donc  $\ln(P_0) = 0$ ), soit  $V_t = \ln(P_t)$  où  $V_t$  représente le cumul de log-rendements au temps  $t$  depuis l'origine  $t = 0$ , l'équation s'écrit :

$$dV_t = d\alpha_t + \kappa(V_0 - (V_t - \alpha_t))dt + \sigma dW_t \quad (1.12)$$

où  $d_t$  est la tendance de long terme et  $r_{nt}$  la pente de la tendance à l'instant ( $t$ ) d'où :

$$d\alpha_t = r_{nt} dt \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_t = \int_0^t r_{ns} ds \quad (1.13)$$

$r_n = r_g - \delta c =$  rendement net du capital ;

$W_t =$  processus de Wiener ;

$\sigma =$  volatilité de  $dV_t$  ;

7. Soit  $\alpha_t = \int_0^t r_{ns} ds$  avec  $\alpha_t$  la tendance de long terme et  $r_{nt}$  la pente de la tendance en  $t$ , alors si  $N \rightarrow \infty$  et  $gt \rightarrow 0$ , on a :  $\int_0^t r_{ns} ds \cong gt \int_{j=0}^{N-1} r_{nj}$ .

8. Noté par la suite « *O-U process* ».

$\kappa$  = vitesse de « retour vers la moyenne ».

S'il n'y a pas de « mean reversion », alors  $\kappa = 0$ .

Dans ce cas l'équation (1.12) devient :  $dV_t = d\alpha_t + \sigma dW_t$ , soit un ABM « Arithmetic Brownian Motion » avec « drift » variable.

S'il n'y a pas de « trend », alors  $d\alpha_t = 0$ . Ce qui veut dire que si les variations de  $d\alpha_t$  sont nulles alors  $d\alpha_t$  est constant, donc  $\exists r_n \in \mathbb{E}$  telle que  $\forall t \in \mathbb{R} \alpha_t = r_n$ .

Dans ce cas (1.12) devient :  $dV_t = \kappa(V_0 - (V_t - r_n)) dt + \sigma dW_t$  ou encore  $dV_t = \kappa(\tilde{r}_n - V_t) dt + \sigma dW_t$  avec  $\tilde{r}_n = V_0 + r_n$  soit un pur « O-U process ».

*Time-dependent Ornstein-Uhlenbeck process*

$$dV_t = d\alpha_t + \kappa(V_0 - (V_t - \alpha_t))dt + \sigma dW_t$$



Sans « trend » :

Sans « mean - reversion » :



$$dV_t = \kappa(\tilde{r}_n - V_t)dt + \sigma dW_t$$

$$dV_t = r_{n_t}dt + \sigma dW_t$$



«OU process»

«ABM (drift variable)»



$$V_t = v_0 e^{-\kappa t} + \tilde{r}_n (1 - e^{-\kappa t}) + \sigma \int_0^t e^{\kappa(s-t)} dW_s$$

$$V_t = v_0 + \int_0^t r_{n_s} ds + \sigma W_t$$

Les moments d'ordre un et deux donnés par l'isométrie d'Itô sont :

■ Cas sans « mean-reversion »

$$\mathbb{E}(V_t) = v_0 + \int_0^t r_{n_s} ds \cong v_0 + \delta t \sum_{j=0}^{N-1} r_{n_j} ; d'où \mathbb{E}(V_t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \delta t \sum_{j=0}^{N-1} r_{n_j} \right)$$

Si  $r_n$  est constant dans le temps on a :

$$\mathbb{E}(V_t) = v_0 + r_n t \quad (1.14) \quad \text{et} \quad \text{Var}(V_t) = \sigma^2 t \quad (1.15)$$

■ Cas sans trend

$$\mathbb{E}(V_t) = v_0 e^{-\kappa t} + \tilde{r}_n (1 - e^{-\kappa t})$$

$$\text{Var}(V_t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa t})$$

Ce sont des fonctions bornées (évoluant autour d'une tendance de pente nulle), pour des valeurs de  $t$  très grandes on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(V_t) = \tilde{r}_n \quad (1.16) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{V}(V_t) = \frac{\sigma^2}{2k} \quad (1.17)$$

On constate que la modélisation retenue est flexible et nous permet de simuler un mouvement brownien, un « *O-U process* », ou une mixture des deux en fonction de la valeur de la vitesse de retour vers la moyenne  $n$ .

La première hypothèse  $n = 0$  suppose que le rendement des actifs suit une loi gaussienne où l'espérance est donnée par un « *drift* » variable. Elle revient à s'inscrire dans le cadre de la théorie des marchés efficients « *Efficient Market Hypothesis* » (EMH), posé par Fama (1965). Cette dynamique n'apporte aucune certitude à l'épargnant sur le montant du capital constitué au terme de son investissement, car, une fois intégré, le processus suit une marche aléatoire. La mise en évidence récurrente dans la littérature académique<sup>9</sup> de « retour vers la moyenne » ou « *mean reversion* » dans les cours des actions ( $n > 0$ ) justifie une modélisation alternative. Ce type de processus présume que les chocs sur les marchés boursiers ont un caractère transitoire et qu'à plus ou moins long terme un mouvement de sens opposé viendra corriger la déviation initiale pour rapprocher les prix des actifs de leur valeur d'équilibre  $\int_0^t r_{n_s} ds$ . L'allongement de la durée de placement conduit donc à une réduction du risque.

### 1.3. L'estimation de la demi vie

Un point est d'identifier l'existence de « *mean reversion* » dans la dynamique des prix, un autre, tout aussi fondamental, est d'évaluer la force du mécanisme. En effet, dans le cas où la vitesse de retour vers la moyenne  $n$  apparaîtrait disproportionnée au regard de la durée d'épargne d'un agent, le phénomène ne conduirait pas à des allocations stratégiques d'actifs significativement différentes de celles déterminées dans le cadre de l'EMH. Au-delà de la détection de mécanismes de convergence dans la dynamique des prix, il est donc capital d'en estimer la vitesse  $n$ . Ce paramètre, complexe à mesurer en raison de son instabilité dans le temps, est traditionnellement estimé par la

9. Notamment par Poterba et Summers (1988), Campbell et Viceira (2005), ou encore Spierdijk *et al.* (2012).

« demi-vie » *hl* du processus, soit la durée moyenne du temps nécessaire pour que l'écart entre le prix de marché et sa valeur fondamentale soit résorbée de moitié. Soulignons, s'il en était besoin, que la vitesse de retour vers la moyenne des prix des actifs risqués est un axe de recherche essentiel dans la modélisation des cours. Or, sur ce sujet, les résultats des recherches empiriques sont loin de converger. Par exemple, Balvers *et al.* (2000), établissent, entre 1970 et 1996, une réversion significative, avec une demi-vie d'environ 3,5 ans. Dans une étude postérieure, Spierdijk *et al.* (2012) analysent le retour à la moyenne des marchés boursiers de 18 pays de l'OCDE au cours des années 1900 à 2009. Sur la période la durée moyenne serait de l'ordre de 18 ans.

Pour tenter de lever cette ambiguïté, au moins deux points essentiels sont à prendre en considération. En premier lieu, il est nécessaire de se pencher sur la « qualité » des séries boursières utilisées. À cet égard, on notera que nos propres estimations méritent d'être affinées. En effet, les séries de « total return » utilisées pour les actions françaises (CAC All-Tradable ex – SBF 250) sont issues de la base de données « Global Financial Data » qui s'appuie sur les données de la Statistique Générale de France puis de l'Insee pour la reconstitution de ses chroniques longues. Or, aux dires mêmes de l'institut statistique, l'indice français souffre de biais de survivance « *survivorship bias* » et surtout de pondération. Nous avons cependant pour projet d'initier une collaboration avec David Le Bris – Professeur à la Toulouse Business School – afin d'estimer la demi-vie à partir du « HCAC 40<sup>10</sup> » qui est une rétropolation de ce qu'aurait été la performance du CAC 40 s'il avait existé avant sa création par Euronext en 1988.

En second lieu, il semble important de se pencher sur l'efficacité des différentes méthodes dédiées à la décomposition entre tendance, cycle et composante irrégulière. À ce stade de nos investigations, nous avons utilisé un filtre Hodrick-Prescott en nous appuyant sur le paramétrage préconisé par les auteurs. Une piste de recherche consisterait à utiliser différents filtres (Hodrick-Prescott, Baxter-King, Christiano-Fitzgerald, ...) en nous appuyant sur les approches<sup>11</sup> d'Avouyi-Dovi et Matheron

---

10. Le Bris et Hauteceur (2010).

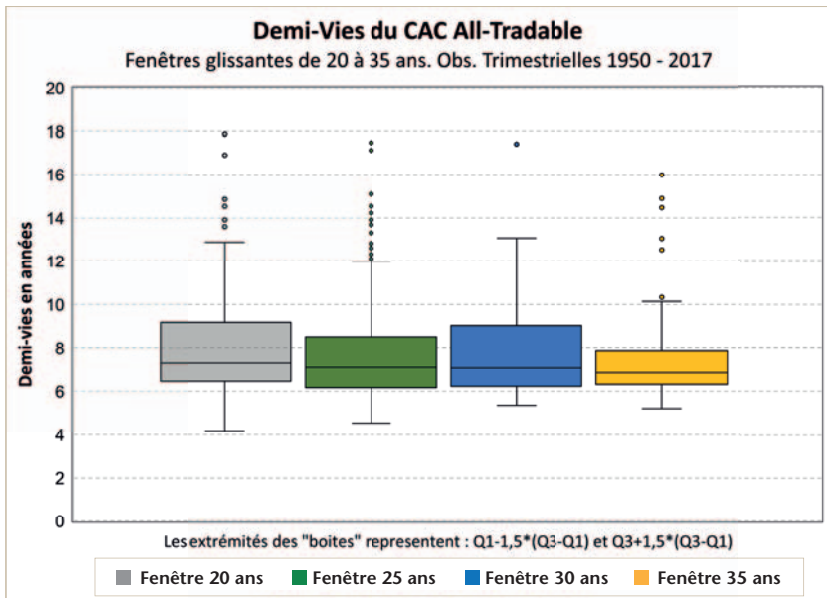
11. Les auteurs s'appuient sur une approche non paramétrique du type « Bry-Boshan » pour détecter les points de retournement et déterminer les paramètres de leur filtre (modèle d'Hamilton pour Damette, filtre de Christiano-Fitzgerald pour Avouyi-Dovi). La référence à une datation exogène permet de mieux calibrer les méthodes de décomposition des séries chronologiques.

(2003) ou de Damette *et al.* (2010) qui consistent à calibrer les paramètres des filtres à partir de critères de coïncidence avec les points de retournement des indices boursiers.

Ces précisions faites, conscient des limites de notre approche, on peut donner une approximation de la vitesse de retour vers la moyenne des actifs risqués. L'estimation des demi-vies des chroniques boursières est complexe en raison de l'existence de nombreux biais dans les méthodes d'estimation. Sans insister sur ce point<sup>12</sup>, signalons que nos calculs s'appuient sur l'estimation sans biais de la médiane (« *Median Unbiased Estimator* »). Cette méthodologie nous a permis d'évaluer les demi-vies du CAC All Tradable de 1950 à 2017 sur des fenêtres glissantes trimestrielles de différentes largeurs afin d'en apprécier l'instabilité temporelle.

L'estimateur détermine des demi-vies médianes annualisées de l'ordre de 7 ans (graphique 1), compatibles avec la durée d'épargne des agents. Ces résultats sont compatibles avec ceux calculés par Spierdijk (*op. cit.*) sur les périodes d'après-guerre. La valeur de la vitesse de

Graphique 1. Estimation des demi-vies des chroniques boursières



Source : calculs des auteurs.

12. Sur le sujet, on se reportera aux travaux de Pradat (2017).

« retour vers la moyenne »  $\eta$  se déduit de la demi-vie  $hl$  par la formule  $\eta = \ln(2) / hl$ . On obtient une vitesse  $\eta$  proche de 0,10. L'estimation des demi-vies des chroniques boursières nous permet de paramétrer la vitesse de retour vers la moyenne dans le processus qui régit le prix des actifs risqués, lequel détermine • pour une aversion au risque donnée • l'évolution de la structure des allocations d'actifs au cours du temps.

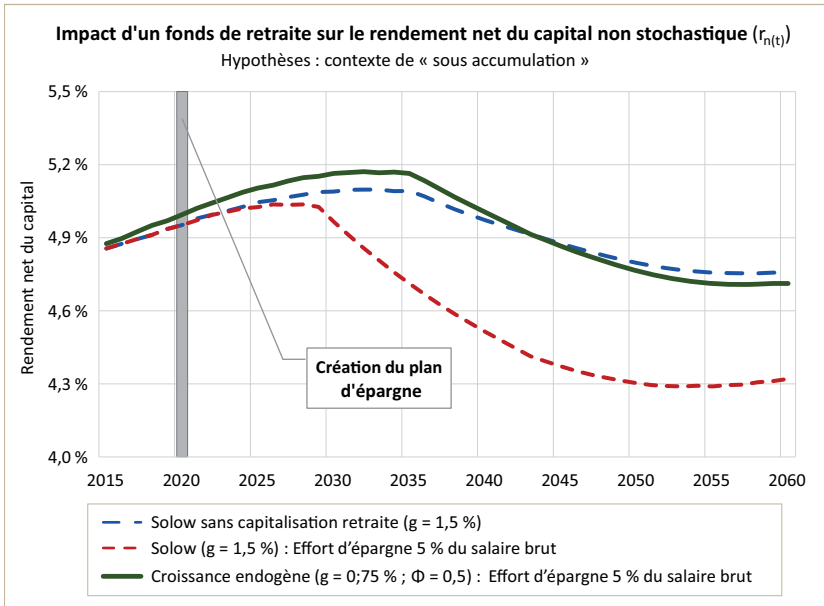
Nantis de nos modélisations stylisées des marchés financiers (EMH vs. « *mean reversion* »), il est désormais possible d'apprécier l'influence de ces processus antagonistes sur la stratégie d'allocation temporelle d'actifs. Pour déterminer la performance des stratégies, nous avons procédé à des simulations stochastiques en y intégrant, tour à tour, les paramètres de la dynamique des cours boursiers précédemment estimés.

## 2. Une application au cadre démo-économique français

Nous l'avons souligné en préambule, le modèle « hybride » utilisé est un modèle d'équilibre général dans lequel seuls les comportements clés en matière de réaction au phénomène du vieillissement démographique sont spécifiés de façon détaillée. En revanche, d'autres aspects macro-économiques, considérés comme accessoires compte tenu des thèmes abordés, sont considérés comme exogènes ou stylisés à l'extrême.

Une autre limitation tient au choix d'un modèle d'économie fermée. Ce choix peut apparaître restrictif, mais dans ce cas précis, la modélisation en économie fermée nous paraît riche d'enseignements. En effet, l'approche en économie ouverte revient à traiter le rendement du capital comme exogène (égal au taux d'intérêt sur le marché international), ce qui rend quelque peu arbitraire la comparaison des performances de la capitalisation et de la répartition. En particulier, on exclurait la dépendance entre taux d'intérêt, démographie et accumulation. Par ailleurs, du fait du vieillissement général des pays développés, on peut supposer que les contraintes démographiques joueront à peu près dans le même sens dans ces économies. La modélisation en économie fermée reproduit alors approximativement les inflexions que pourrait connaître le rendement du capital dans l'ensemble de ces pays. En outre, comme l'atteste le graphique 2 ci-dessous, en raison de l'élasticité de substitution capital/travail retenue ( $s = 1$ , soit une fonction Cobb-Douglas), la décroissance du rendement du capital est relativement progressive, même dans le cas de la création d'un plan d'épargne-retraite.

## Graphique 2. Rendement du capital et fonction de production



Source : calculs des auteurs.

## 2.1. Une simulation de référence

Afin d'estimer l'évolution du rendement implicite de la répartition, il est nécessaire de disposer d'une simulation tendancielle sur perspectives financières des régimes de retraite. Dans la maquette utilisée à cette fin, le fonctionnement des systèmes de retraite est stylisé et empreinte les principales caractéristiques réglementaires et démographiques des régimes des salariés du secteur marchand. Avant de détailler les résultats des simulations, il est important de résumer les principales hypothèses retenues concernant les paramètres clés des projections.

Dans nos projections, l'hypothèse de productivité du travail est fixée à 1,5 % l'an, soit un pronostic similaire à celui retenu par le Conseil d'orientation des retraites (COR) et en phase avec le ralentissement de la croissance de la productivité du travail observé depuis le début des années 1990. Parallèlement, le chômage convergerait vers son niveau structurel. La projection à législation constante montre que la succession des réformes entamées depuis 1993 va se traduire par une poursuite de la baisse du niveau des pensions relativement aux

Tableau 4. Synthèse des hypothèses retenues pour les projections

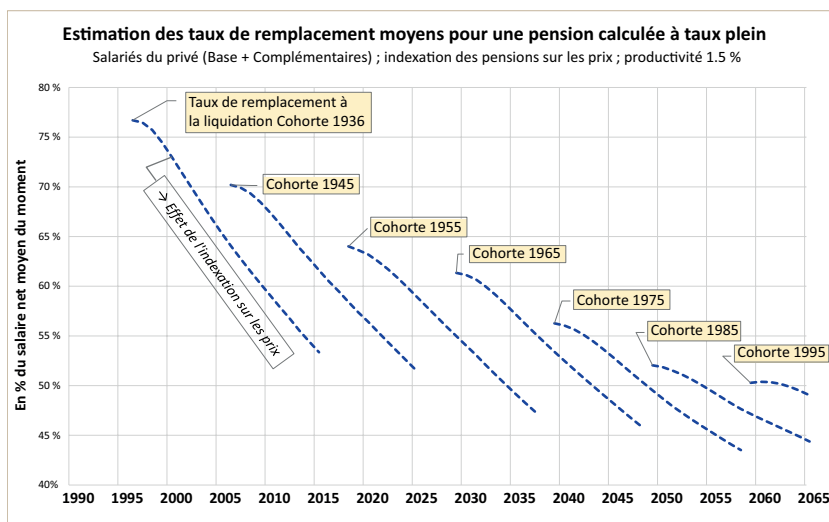
Démographie :	
Projections démographiques 2013-2070, Insee Hypothèse centrale* Projections de population active 2016-2070, Insee Hypothèse centrale* * Fécondité 1,95 enfant par femme ; solde migratoire + 70000 sur la période	
Économie	
« Scénario 1,5% » du COR, novembre 2019.	
Croissance de la productivité du travail à long terme	1,5 %
Taux de chômage de long terme ( $U_0$ )	7,0 %
Évolutions réglementaires	
Durée d'assurance	La durée d'assurance pour une retraite à taux plein augmente d'un trimestre par an et passe de 41 ans et trois trimestres en 2020 à 43 ans en 2035
Indexation des pensions	Régime général: revalorisation des pensions et des meilleurs salaires sur les prix Régimes complémentaires: valeur d'achat du point indexée sur le salaire moyen, valeur de service du point indexée sur les prix

salaires. Pour s'en convaincre, analysons l'évolution des taux de remplacement projetés pour les différentes générations tout au long de la durée de leur retraite (graphique 3). Par exemple, les salariés nés en 1936 ont perçu en 1996 une retraite moyenne supérieure à 70 % du salaire net moyen des actifs du moment. Les taux de remplacement des individus de la même cohorte vont diminuer au cours du temps en raison de la sous-indexation des pensions par rapport aux salaires.

Pour les générations plus jeunes, l'impact de la réforme sera encore plus perceptible puisque les taux de remplacement à la liquidation vont baisser progressivement d'une vingtaine de points entre les salariés de la génération 1936 et ceux de la génération 1995 qui prendront leur retraite en 2060. Au vu des résultats de l'exercice de simulation, on constate que l'indexation des retraites sur l'inflation permet aux gains de productivité de ne pas se retrouver dans les pensions. Ce mécanisme, décrit en détail par Hamayon et Legros (2014), se traduit par une baisse du pouvoir d'achat relatif des retraités par rapport aux actifs et participe massivement au rééquilibrage du système de retraite sans que ne soit affichée dans la réforme une baisse explicite des taux de remplacement.



Graphique 3. Évolution des taux de remplacement projetés par génération



Source : calculs des auteurs.

## 2.2. L'introduction d'un dispositif d'épargne pour compenser la baisse des pensions

La volonté de freiner la dérive des taux de remplacement pourrait conduire les pays caractérisés par une démographie vieillissante à accélérer le développement des compléments de retraite par épargne afin de limiter les conséquences de la baisse du rendement des régimes par répartition. En effet, l'observation des chroniques passées tend à montrer que le rendement des actifs financiers est supérieur à la croissance de la masse salariale. Toutefois, le capital accumulé au titre des retraites pourrait vite représenter des sommes considérables dont la neutralité macro-économique n'est pas avérée. Les interactions entre épargne retraite, accumulation du capital et croissance légitiment donc les approches s'appuyant sur un bouclage macro-économique.

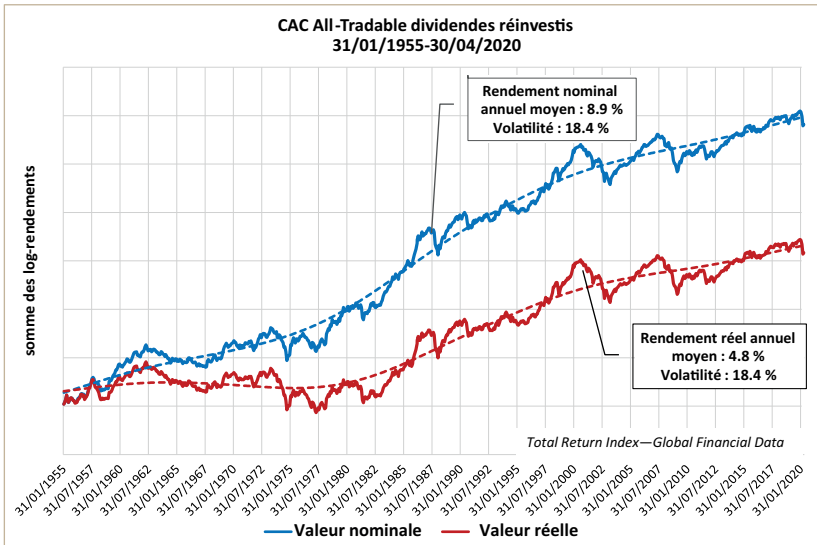
### 2.2.1. Caractéristiques du plan d'épargne retraite fictif

Notre plan d'épargne retraite à cotisations définies<sup>13</sup> s'inscrit volontairement dans un cadre très simplifié du modèle de cycle de vie de Modigliani-Brumberg (1954). Dès qu'ils sont de jeunes adultes, les

13. Nous n'abordons pas dans ce bref article la gestion actif / passif (ALM) de notre plan d'épargne, notamment les stratégies de couvertures (swap, option, dérivés...).

ménages épargnent pour s'assurer un complément de retraite car ils souhaitent lisser leur consommation au cours du temps. L'épargne augmente jusqu'à la retraite puis est convertie en rente. Les consommateurs ont un horizon de planification correspondant à leur espérance de vie. Il n'y a pas de motifs de dons ni de legs, les préférences sont restreintes à la seule aversion au risque. En outre, nous faisons l'hypothèse forte que l'investissement en actifs risqués peut se faire sans contrainte dès l'entrée dans la vie active. Nous nous permettons cette simplification car l'objectif poursuivi se focalise sur la comparaison des propriétés « rendements – risques » de stratégies d'allocation d'actifs contrastées et non pas sur l'analyse des extensions du modèle de cycle de vie. Nous avons conscience que la prise en compte des risques sur le revenu et l'existence de contraintes de liquidité modifient singulièrement le profil de détention d'actions durant la vie active (Cocco *et al.*, 2005). À cet égard, les travaux de Carroll (1997) sur l'épargne de précaution montrent que lorsque les ménages sont soumis à des risques de perte de revenus du travail (chômage), ils accumulent un stock d'épargne tampon pour faire face à cette situation. Par ailleurs, en vertu du concept de tempérance (Kimball, 1990 et 1993), cette épargne de précaution est par nature investie sur des actifs financiers facilement mobilisables à moindre coût, donc des actifs sans risque. Autre simplification assumée, nous supposons lors de nos simulations qu'en moyenne la majorité de l'épargne financière est investie pour la retraite. C'est-à-dire que les individus sont censés épargner 5% de leur salaire pour se constituer une épargne de cycle de vie. Ces réserves faites, afin d'évaluer l'incidence de la constitution d'un plan d'épargne retraite sur la rémunération des facteurs et sur le niveau de vie des retraités, les hypothèses suivantes ont été retenues. On suppose que le fonds de retraite est abondé à partir de 2020 par les différentes cohortes de salariés. Tous les salariés du secteur privé dont l'âge est inférieur de 20 ans à l'âge de la retraite à la date de démarrage du fonds y accumulent 5 % de leurs salaires bruts. Les cohortes dont l'âge est compris entre l'âge de la retraite moins 8 ans et l'âge de la retraite moins 20 ans, adhèrent de manière facultative au fonds. On a supposé que 50 % des salariés concernés cotiseraient au fonds. Le fonds est décapitalisé en fonction de l'arrivée à l'âge de la retraite des cohortes qui y sont affiliées, auxquelles des rentes sont allouées. Le rendement et la volatilité des actifs risqués sont fixés, assez arbitrairement, en fonction des normes de long terme (graphique 4).

Graphique 4. CAC All-Tradable (ex SBF 250)



Source : calculs des auteurs.

L'espérance de rendement  $r_{n(t_0)}$  et la volatilité  $\sigma_{(t_0)}$  qui ont servi à l'initialisation de la dynamique des prix des actifs sont respectivement de 5 % et de 18 %, soit les valeurs réelles moyennes calculées à partir du logarithme des rendements de janvier 1955 à avril 2020.

Le niveau de « sous accumulation » du modèle de Solow est déterminé afin que la productivité marginale du capital  $r_{n(t_0)}$  en début de simulation corresponde au rendement calculé à partir des chroniques de long terme. Par la suite, l'espérance évolue en fonction du rendement net du capital  $r_{n(t)}$  et d'une composante stochastique stationnaire. La volatilité  $\sigma_{(t)}$  est calculée à partir d'une relation basique déduite de l'expression de la « droite de marché des capitaux » (CML). Elle dépend de son niveau historique  $\sigma_{(t_0)}$ , des valeurs de l'actif sans risque  $r_f$  et du rendement d'équilibre  $r_{n(t)}$  :

$$\sigma_{(t)} = (r_{n(t)} - r_f) * \left( \frac{\sigma_{(t_0)}}{r_{n(t_0)} - r_f} \right) \quad (2.1)$$

$\sigma_{(t)}$  = volatilité en (t)

$\sigma_{(t_0)}$  = volatilité historique

$r_{n(t_0)}$  = rendement historique

$r_{n(t)}$  = rendement d'équilibre

$r_f$  = rendement de l'actif sans risque

Pour le reste, les hypothèses relatives à la revalorisation des rentes ou encore aux frais de gestion sont précisées dans le tableau ci-dessous.

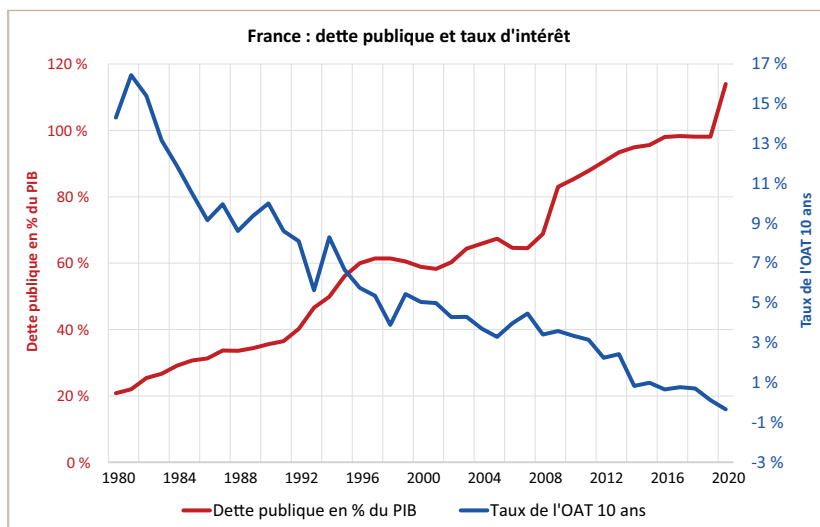
Tableau 5. Gestion du fonds d'épargne

Effort d'épargne en % du salaire brut	5 %
Frais sur versements	2 %
Rendement réel de l'actif sans risque	$r_f = 0 \%$
Rendement réel de l'actif risqué en $t_0$	$r_{n(t_0)} = 5 \%$
Rendement réel de l'actif risqué en $t$	Rendement d'équilibre = $r_{n(t)}$
Volatilité de l'actif risqué en $t_0$	$\sigma_{(t_0)} = 18 \%$
Volatilité des actifs risqués en $t$	$\sigma_{(t)} = (r_{n(t)} - r_f) * \sigma_{(t_0)} / r_{n(t_0)} - r_f$
Revalorisation des rentes : (1 + taux rémunération) / (1 + taux technique) - 1	0 % (indexation sur les prix)

Notre hypothèse concernant le taux de revalorisation des provisions constituées pour servir les rentes, à savoir un taux technique nul (voir *supra* équation 1.11), mérite d'être argumentée. Elle résulte tant d'une analyse réglementaire qu'économique. S'agissant des rentes viagères, le Code des assurances précise que le taux technique ne doit pas excéder 60 % du taux moyen d'emprunt d'État (TME) des 6 derniers mois. D'après la Banque de France, fin octobre 2020, le TME moyen était de -0,12 %, et le taux technique nominal de 0 % (il est limité à 0 % par la réglementation). Les taux de chargement de gestion sont donc supérieurs aux taux techniques. D'un autre côté, on constate sur le graphique 5 qui présente simultanément la dette publique et les taux d'intérêt, une baisse continue des titres obligataires à 10 ans.

Cette baisse tendancielle s'explique en début de période par le recul de l'inflation. Au-delà la hausse continue de l'endettement public rend nécessaire le maintien des taux longs à un bas niveau pour assurer la solvabilité budgétaire. De ce fait, il est vraisemblable que la normalisation des taux sans risque n'ait pas lieu à courte échéance comme le montrent Ducoudré *et al.* (2019). Pour l'ensemble de ces raisons nous avons retenu l'hypothèse prudente d'un taux sans risque réel nul tout au long des simulations.

Graphique 5. Dette publique et taux d'intérêt



Source : calculs des auteurs.

### 2.2.2. Les stratégie d'allocation d'actifs

Dans un cadre simplifié, le choix d'un agent en matière d'épargne dépend de trois grands types de facteurs (Arrondel et Masson, 2016). Tout d'abord, des « ressources » disponibles de l'individu, ensuite, de sa perception de l'environnement et de ses anticipations vis-à-vis du futur et enfin de ses préférences à l'égard du risque et du temps. Pour des raisons de simplicité nous n'avons retenu que l'aversion au risque comme facteur de demande d'actifs risqués. Plus précisément, le critère adopté pour déterminer la plus ou moins grande capacité des épargnants à prendre des risques est une probabilité de « préservation du capital ». Par exemple un « Profil 95 % » sélectionnera une succession d'allocations structurelles d'actifs lui assurant<sup>14</sup> au terme, une préservation du capital investi dans le plan d'épargne retraite dans 95 % des cas, ce qui correspond à une « Value-at-Risk » (VaR) nulle au seuil  $(1 - \alpha) = 5\%$ . Comme le montrent Stangeland et Turtle (1999), lorsque les cours suivent un processus de retour à la moyenne, la stratégie la plus appropriée est celle de la « diversification temporelle<sup>15</sup> ».

14. En fonction d'une distribution statistique paramétrique connue

15. En revanche dans l'EMH, la stratégie de diversification temporelle est plus délicate à justifier. Bodie *et al.* (1992) montrent toutefois que la prise en compte du capital humain et de la flexibilité du marché du travail peuvent justifier le recours à ce type de stratégie.

Dans ce cas, la stratégie d'un investisseur consistera à sélectionner une succession d'allocations structurelles d'actifs correspondant à une probabilité de « préservation du capital » prédéterminée. L'objectif étant de maintenir une VaR constante pendant toute la période d'accumulation, la stratégie impose des réallocations périodiques afin de réduire le poids relatif des actifs risqués. Soulignons que par souci de simplification, on suppose, à l'instar de Barberis (2000), que le marché est constitué d'un actif sans risque et d'un actif risqué<sup>16</sup>, conformément au théorème de la séparation. Les résultats déterminent des stratégies différenciées selon les propriétés que l'on prête au cours des actions.

■ L'hypothèse d'efficience des marchés (EMH)

Dans le cas paramétrique – hypothèse de distribution gaussienne des « *log returns* » – la VaR s'exprime classiquement en fonction de la moyenne et de la variance déterminées par la demande ( $p$ ) d'actifs risqués :

$$VaR_{(t,p)} = p * \left( (r_{n(t)} - r_f) + \sigma_{(t)} * z_{(1-\alpha)} \right) \quad (2.2)$$

avec :

$p$  = proportion d'actifs risqués

$r_{n(t)}$  = productivité marginale du capital

$r_f$  = rendement de l'actif sans risque

$\sigma_{(t)}$  = volatilité

$Z_{(t-\alpha)}$  = le quantile de la loi  $N(0,1)$  au seuil de probabilité  $t - \alpha$

Dans le cas d'une gaussienne, on déduit facilement l'évolution de l'expression (2.2) en fonction de l'horizon de placement :

$$VaR_{(t,p)} = T * p * \left( (r_{n_t} - r_f) + \frac{\sigma_t}{\sqrt{T}} * z_{(1-\alpha)} \right) \quad (2.3)$$

avec  $T$  = temps restant avant le terme du placement.

---

16. La question de la construction d'un modèle intégrant plus de classes d'actifs (donc une plus grande diversification) reste posée. La réponse est vraisemblablement à chercher dans une modélisation exogène. En effet, l'intégration de titres de dette dans la maquette semble hors d'atteinte compte tenu du rôle croissant qu'ont pris les politiques monétaires dans la formation des taux.

■ L'hypothèse de retour vers la moyenne

Dans le cas où la dynamique des cours est régie par un « *O-U process* » l'expression de la VaR en fonction de l'horizon ( $t$ ) devient :

$$VaR_{(t,p)} = T * p * \left( (r_{n(t)} - r_f) + \frac{\sigma(t)}{\sqrt{T}} * \frac{\sqrt{\frac{\sigma(t)^2}{\kappa} * (1 - \exp(-\kappa * T))} / T * Z_{(1-\alpha)}}{\sqrt{\frac{\sigma(t)^2}{\kappa} * (1 - \exp(-\kappa))}} \right) \quad (2.4)$$

avec  $\kappa$  = vitesse de retour vers la moyenne.

### 2.3. Un bilan du « bien-être » des agents

Au-delà de la remontée mécanique du pouvoir d'achat relatif des retraités consécutive au versement d'une rente viagère additionnelle issue de l'accumulation d'un capital, la question cruciale qui se pose est celle de l'utilité ou du « bien-être » que les agents peuvent retirer de leur abondement au fonds d'épargne. On peut tenter une mesure de ce bien-être en calculant le taux de rendement interne<sup>17</sup> (TRI) de « l'opération retraite » (qu'elle provienne de transferts instantanés ou d'épargne) sur leur cycle de vie. Un tel critère intègre à la fois le revenu tiré du régime de retraite, l'effort consenti lors des cotisations et la durée passée à la retraite relativement à celle passée au travail et peut être assimilé à une forme de « comptabilité générationnelle » restreinte à la seule question des retraites au sens d'Auerbach *et al.* (1991). Pour les affiliés qui liquident leur retraite, on peut approximer, par génération et par sexe, le rendement interne de « l'opération retraite » par la formule détaillée ci-dessous. Pour tenir compte de l'impact de la capitalisation, il suffit d'augmenter le taux de cotisation de l'effort d'épargne en proportion du salaire et d'intégrer la rente viagère à la pension de retraite.

$$\sum_{a=20}^r (\tau_{(t)+f} s_{(t)}) \times w_{(a,t)} \times ar_{(a,t)} \times s(a) \times (1 + ir)^{(r-a)} \cong \sum_{a=r+1}^{\omega} \frac{(p_{(a,t)} + pk_{(a,t)}) \times s(a)}{(1 + ir)^{(a-r)}} \quad (2.5)$$

17. On notera qu'au-delà des valeurs intrinsèques des TRI, il est important de prêter attention à leur « dispersion » qui ont une incidence négative sur le bien-être des agents. Pour une discussion sur le sujet on pourra se référer à Lavigne (2010), qui liste les indicateurs pour mesurer l'inégalité entre les générations.

$ir$	= taux de rentabilité interne
$w$	= salaire moyen
$\tau$	= taux de cotisation du régime par répartition
$ar$	= taux d'activité
$p$	= pension de retraite
$s(a)$	= fonction de survie
$r$	= âge de départ à la retraite
$\omega$	= âge limite de la vie biologique
$fs$	= effort d'épargne en % du salaire
$pk$	= rentes attribuées par le fonds à l'âge $r$

### 3. Le verdict des simulations

En définitive nous avons retenu trois profils reflétant un spectre assez contrasté d'épargnants. Les probabilités de « préservation du capital » reflétant l'aversion au risque des agents sont de 99 %, 95 % et 90 %. On notera que l'étude de différents « cas types » n'a pas d'incidence sur l'intensité capitaliste du modèle démo-économique et donc pas d'impact sur la productivité marginale du capital. Comme il n'est pas envisageable de restituer les résultats pour l'ensemble des cas types, seuls quelques exemples représentatifs sont présentés (un tableau synoptique donnant l'ensemble des résultats figure en annexe).

#### 3.1. Le cas d'un Profil 99 %

La stratégie d'allocation testée correspond à celle d'un agent résolument averse au risque. Cette stratégie vise à préserver au minimum 99% de la valeur du capital accumulé pour compléter la pension de retraite, ce qui correspond à une VaR de 0 % au seuil  $(1 - \alpha) = 1$  %. Comme les grandeurs sont exprimées en termes réels, l'objectif revient pratiquement à maintenir le pouvoir d'achat du capital.

Cette hypothèse présente un intérêt particulier car elle permet une comparaison directe avec le système par répartition dont le rendement actuariel implicite n'a jamais été négatif et que l'on peut considérer comme « un actif sans risque<sup>18</sup> ». Sur le plan du calcul, on fait l'hypothèse que les agents ajustent leurs allocations stratégiques à chaque

---

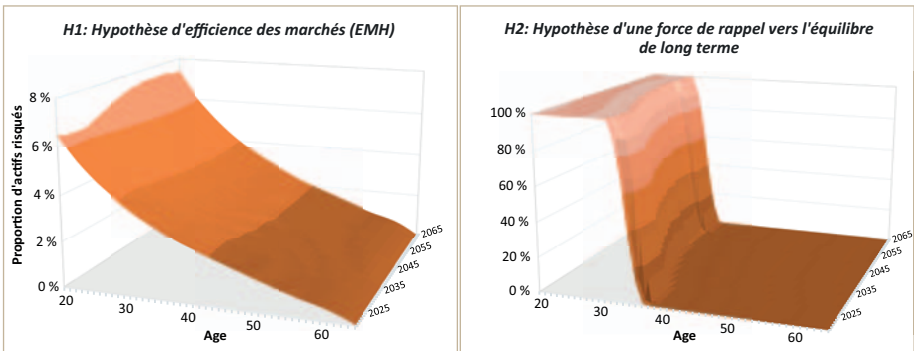
18. À la condition expresse que l'effort de solidarité que consentent les générations en activité en faveur des retraités, trouvera sa contrepartie dans l'obligation faite aux générations futures d'actifs de réaliser un effort similaire.



temps  $t$  en fonction de la valeur du rendement marginal du capital  $r_{m(t)}$ , de la volatilité  $\sigma_{(t)}$  constatée et de la durée  $T$  restante avant la liquidation de la retraite, de manière à respecter au mieux le seuil de probabilité associé au critère de VaR.

Les allocations stratégiques obtenues dans l'hypothèse où le rendement des actions suit une loi gaussienne dont l'espérance est donnée par un « drift » variable (hypothèse « H1 ») s'avèrent plus prudentes que celles déterminées dans l'hypothèse alternative. Ainsi, dans ce premier cas l'évolution du poids des actifs risqués dans les allocations des épargnants atteindraient un maximum de l'ordre de 8 % au cours de la phase d'accumulation (à l'âge de 20 ans par hypothèse). Pour le même profil, dans l'hypothèse d'un retour des cours boursiers vers une tendance déterministe (hypothèse « H2 »), les jeunes actifs seraient conduits à détenir des portefeuilles investis 100 % en actifs risqués pendant une durée d'une quinzaine d'années (graphique 6). Au-delà, c'est-à-dire environ 30 ans avant l'âge de départ à la retraite, l'arbitrage entre actifs risqués et actifs sans risque serait relativement brusque. Le résultat s'explique par des vitesses de réduction de la variance différentes selon les processus envisagés.

Graphique 6. Profil 99 % : proportion d'actifs risqués



Source : calculs des auteurs.

### 3.1.1. Rentes et taux de remplacement

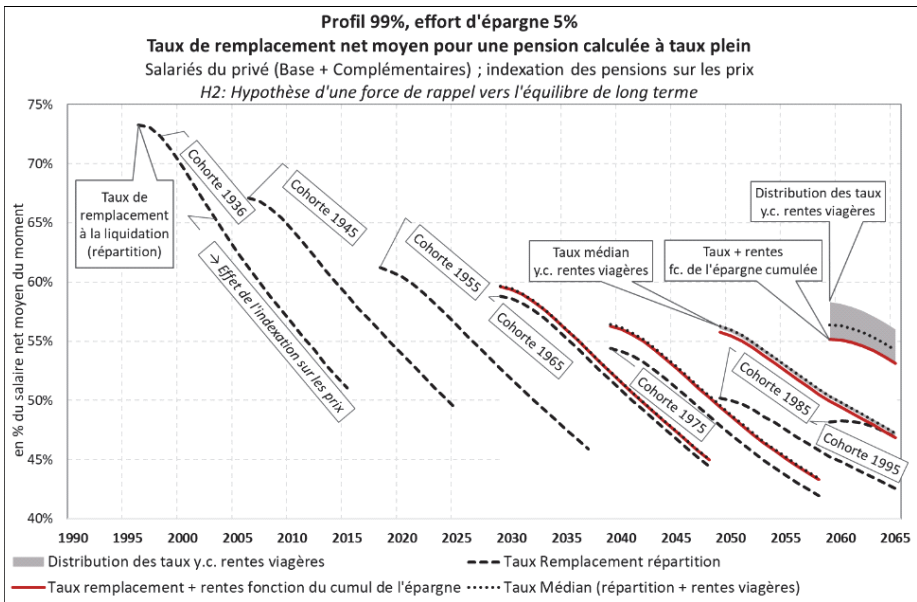
Dans le cas d'une distribution normale du logarithme des rendements, les rentes attribuées par le fonds de retraite • cf. équation (1.11)

- progresseraient et se stabiliseraient à un niveau proche de 7 % du salaire moyen du moment pour les cohortes nées en 1995, qui seront les premières à avoir cotisé sur l'ensemble de leur période d'activité.

Ce niveau est proche des rentes déduites du montant de l'épargne cumulée. Le rendement de cette première stratégie est donc relativement insignifiant en raison de la faible proportion d'actifs risqués dans les allocations stratégiques.

La modélisation dans laquelle on simule une force de rappel, détermine naturellement des rentes plus élevées (le niveau médian des rentes dépasserait 8 % du salaire net du moment en fin de projection) et conjointement plus dispersées. Les rentes sont exprimées en pourcentage du salaire net du moment, soit le même dénominateur que les taux de remplacement. On peut donc, par simple addition, étudier l'impact du plan d'épargne retraite sur les niveaux de vie comparés des retraités et des actifs (graphique 7). Il apparaît qu'à partir des années 2050, les rentes issues de l'effort d'épargne permettraient d'enrayer la baisse des taux de remplacement des régimes par répartition. Par la suite, les taux de remplacement, effort d'épargne compris, progresseraient de plusieurs points au prix d'une plus grande dispersion.

Graphique 7. Profil 99 % : Taux de remplacement y.c. effort d'épargne



Source : calculs des auteurs.

### 3.1.2. Un bilan du « bien-être » des agents

- L'hypothèse d'efficience des marchés

La comparaison des TRI du bilan retraite avec et sans effort d'épargne montre clairement que les générations qui participent au plan d'épargne, avec comme critère la préservation de 99 % de la valeur du capital au terme (Profil 99 %) sur un marché efficient (EMH), bénéficient de rendements inférieurs à ceux offerts par l'édifice des régimes par répartition qui dépendent, toutes choses égales par ailleurs, des évolutions démographiques et des progrès de productivité. Compte tenu de la très faible proportion d'actifs risqués dans les allocations de cycle de vie des affiliés, la rentabilité des investissements est pratiquement nulle en termes réels (0,20 % en moyenne sur la phase d'épargne). On en déduit que si les marchés sont efficients, la préservation de la valeur du capital accumulé ne peut être atteinte qu'au prix d'un rendement dérisoire, inférieur à celui de la répartition. Sous cette hypothèse, les marchés financiers ne seraient pas capables d'offrir le même couple « rendement – risque » que les régimes par répartition.

- La conjecture de retour vers la moyenne

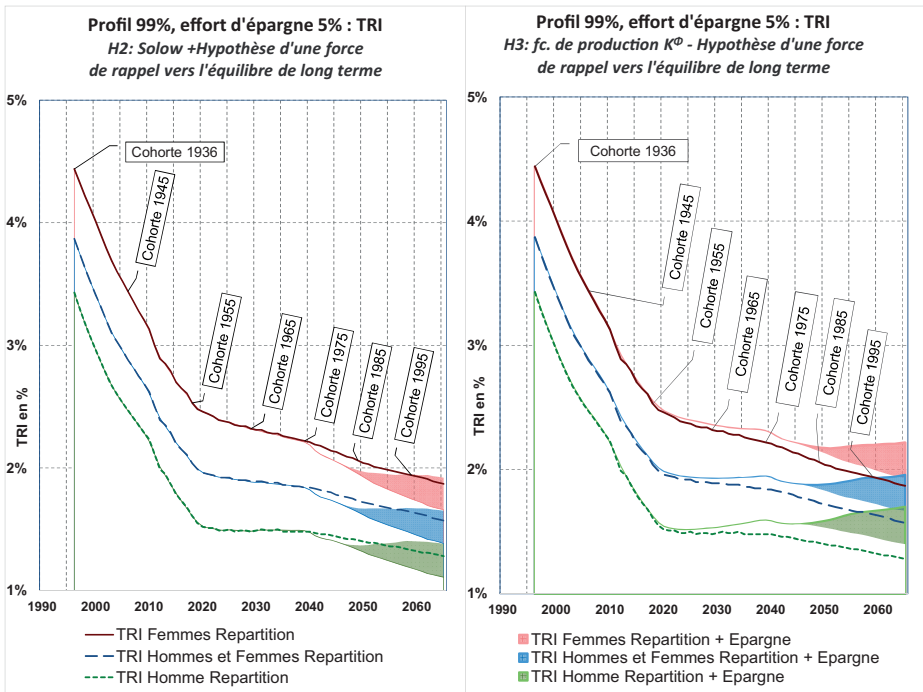
Dans le cas où la dynamique des cours est régie par un « *O-U Process* », les conclusions sont plus contrastées. On note une nette amélioration des TRI des cohortes relativement à l'hypothèse d'EMH. La prise en compte des rentes issues du plan d'épargne contribuerait toutefois à une dégradation du rendement actuariel de l'opération retraite pour les femmes, tandis que pour les hommes les TRI des régimes de retraite seraient proches des TRI médians incluant les rentes issues de l'effort d'épargne. Du fait de la plus grande proportion de femmes au sein des retraités, la rentabilité moyenne se détériorerait légèrement. En résumé, dans l'hypothèse « H2 », le rendement actuariel du plan d'épargne pourrait concurrencer celui de la répartition dans le cas des pensions de droit direct calculées à taux plein.

- Croissance endogène

Du fait de la faible proportion d'actifs risqués déterminée dans l'hypothèse EMH, l'utilisation d'un bouclage macroéconomique alternatif avec croissance endogène (hypothèse « H3 ») ne change pas les conclusions déduites du modèle Solow. Par conséquent nous nous focalisons sur l'hypothèse où la dynamique des cours est régie par un « *O-U*

Process ». Afin d'illustrer les propriétés du modèle de croissance endogène, on a retenu une valeur « raisonnable » pour  $\phi$ . L'exercice de simulation a été effectué avec le modèle de croissance endogène pour  $\phi = 0,5$  et  $g = 0,5$ , soit un taux de croissance de 1,5 % si la croissance démographique est nulle. La comparaison des séries de TRI déterminées par l'addition des taux de remplacement et des rentes dans l'hypothèse « H2 » et le modèle  $K^1$  montre que dans cette dernière hypothèse, la participation au plan d'épargne conduirait à une augmentation générale du TRI des affiliés (graphique 8). L'hypothèse « H3 » a, en effet, un impact positif conjoint sur le rendement implicite de la répartition et sur celui du plan d'épargne. D'un côté, l'introduction d'une dose de capitalisation se traduit par une croissance des salaires supérieure à celle déterminée par le modèle de base, de l'autre, les rendements du modèle de croissance endogène sont peu impactés par l'augmentation de l'intensité capitaliste  $K/L$  (cf. *supra* graphique 2).

Graphique 8. TRI des cohortes : Solow vs. Croissance endogène



Source : calculs des auteurs.

Le modèle « Ki » détermine des liens plus robustes entre accumulation du capital et production. Même si ces effets ne sont que transitoires, ils conduisent à des niveaux des différents agrégats supérieurs et donc dans ce cas précis à des TRI supérieurs au terme des simulations.

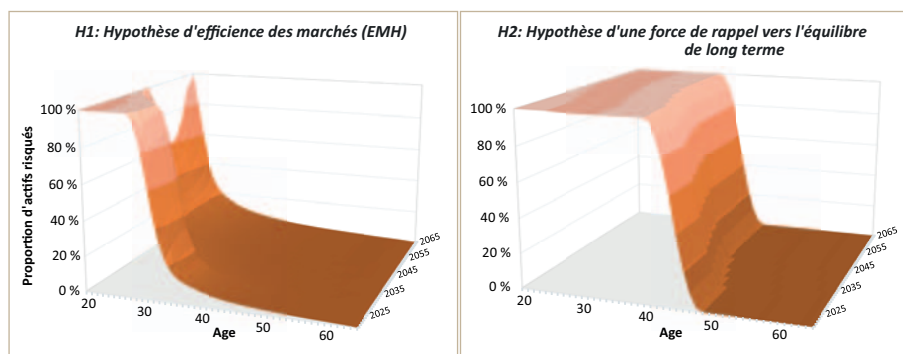
### 3.2. Le cas de profils plus risqués

Les conséquences d'une prise de risque accrue sont brièvement évoquées dans le présent paragraphe au travers de l'étude des Profils 95 % et 90 %.

#### 3.2.1. Le cas d'un Profil 95 %

Un « Profil 95 % » sélectionne une succession d'allocations structurales d'actifs avec pour objectif la préservation du capital investi dans le plan d'épargne dans 95 % des cas. L'acceptation d'une perte en capital significative se traduit par des allocations plus riches en actifs risqués (graphique 9) et débouche mécaniquement sur des compléments de retraite médians plus importants.

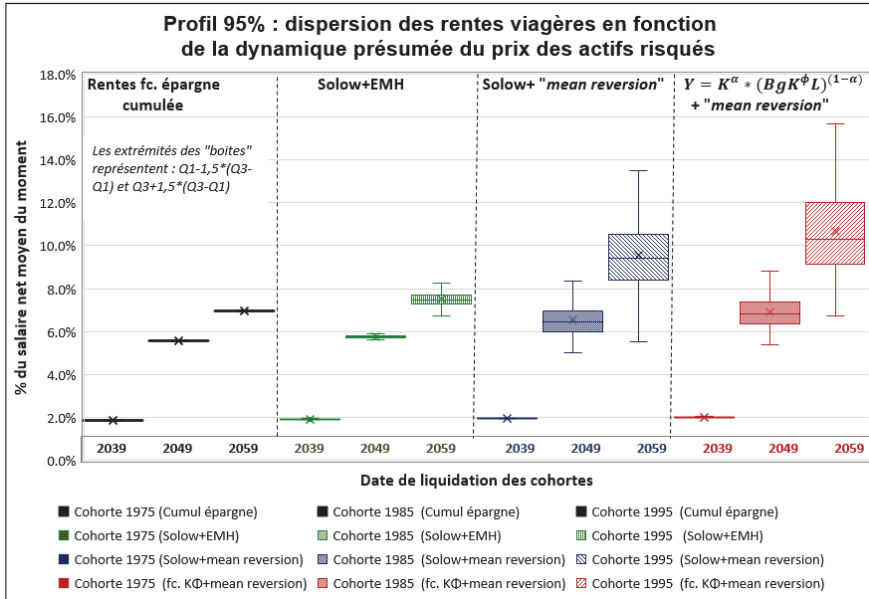
Graphique 9. Profil 95 % : proportion d'actifs risqués



Source : calculs des auteurs.

La stratégie conduit toutefois à des rentes viagères plus dispersées en raison de l'augmentation de la volatilité des placements. Le graphique 10, qui compare les rentes en fonction des dynamiques du prix des actifs à celles calculées à partir de l'épargne cumulée sur la base d'un rendement nul, montre que l'attribution de rentes élevées est associée à un faible risque de pertes.

Graphique 10. Rentes viagères : Solow vs. Croissance endogène

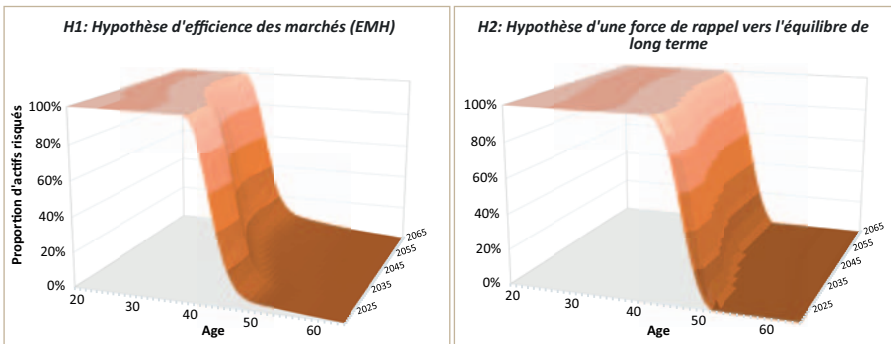


Source : calculs des auteurs.

### 3.3. Le cas d'un Profil 90 %

Les cas types caractérisés par un « Profil 90 % » investissent assez massivement en actifs risqués (graphique 11). Naturellement leur poids est prépondérant dans l'hypothèse de retour vers la moyenne.

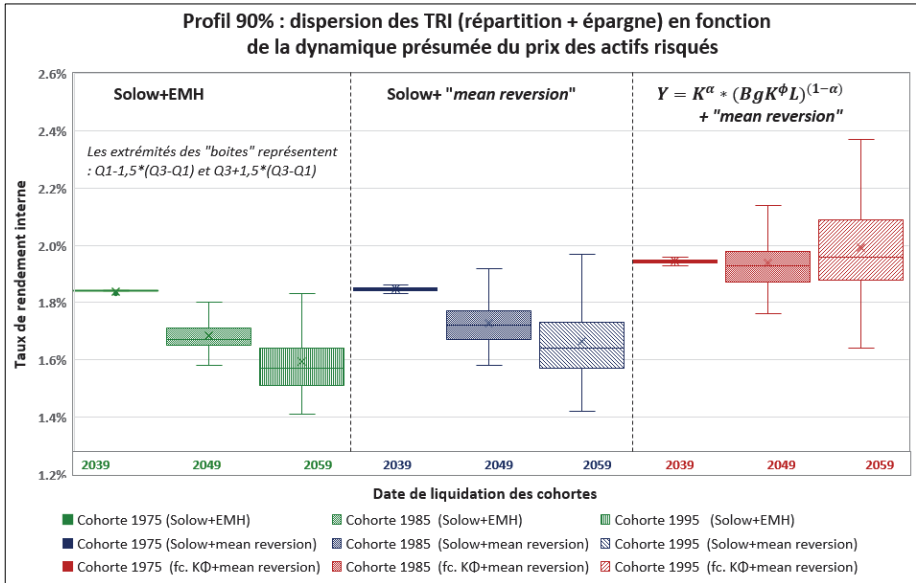
Graphique 11. Profil 90 % : proportion d'actifs risqués



Source : calculs des auteurs.

En dépit d'allocations structurelles enrichies en actions, les TRI continueraient à se dégrader en raison de la baisse continue du rendement implicite des régimes par répartition. On note cependant que dans l'hypothèse « H3 » ; qui envisage simultanément « croissance endogène » et « *mean reversion* », les TRI progressent pour toutes les générations (graphique 12), le processus est identique à celui exposé au point 3.1.2.

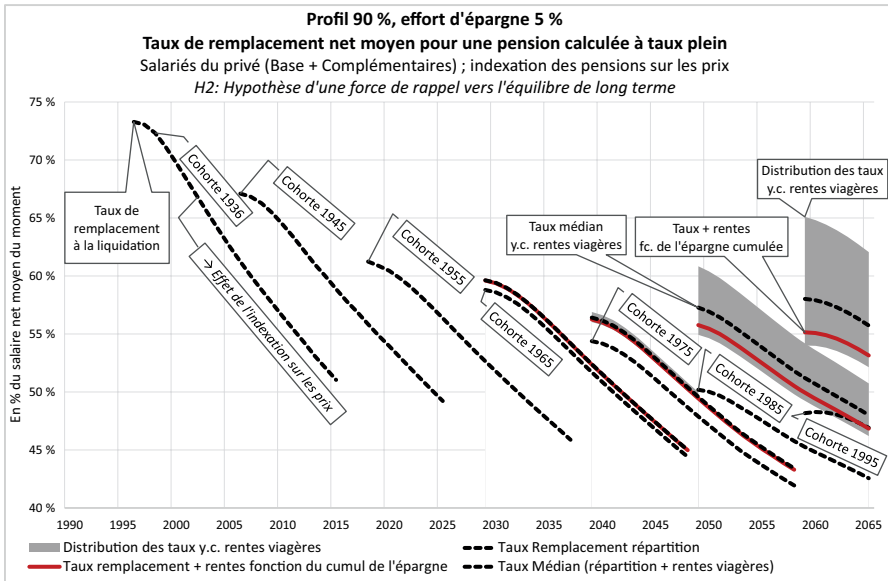
Graphique 12. TRI des cohortes en fonction de la dynamique des prix



Source : calculs des auteurs.

Sous l'hypothèse raisonnable « H2 » d'un retour des cours boursiers vers une tendance déterministe, on peut représenter l'évolution des taux de remplacement avec et sans effort d'épargne. On constate que l'effort d'épargne des cohortes nées après 1985 conduirait à une nette amélioration des taux de remplacement. Le gain entre le « taux médian » (déduit des pensions servies par les régimes obligatoires et des rentes viagères du plan d'épargne) et le « taux de la répartition » serait de presque 10 points pour la cohorte 1995. Par construction, cette stratégie conduirait dans 10% des cas à des rentes inférieures d'environ 1 % aux rentes calculées sur la base d'un rendement nul (symbolisées par un trait rouge sur le graphique 13), soit un risque de perte, somme toute, limité.

Graphique 13. Profil 90 % : Taux de remplacement y.c. effort d'épargne



Source : calculs des auteurs.

#### 4. Éléments de conclusion et pistes de recherche

Les résultats des simulations réalisées dans le cadre démo-économique français ne prétendent pas à l'exactitude, mais ils représentent un ordre de grandeur raisonnable qui permet d'illustrer les interactions entre les propriétés que l'on prête au cours des actions et l'efficacité des stratégies de diversification temporelle des risques.

Elles montrent que si le prix des actifs risqués suit une marche aléatoire, c'est-à-dire un processus sans mémoire dans lequel les chocs sont permanents (EMH), les agents averses au risque ne pourront pas obtenir sur les marchés un ratio rendement/risque équivalent à celui procuré implicitement par l'édifice des régimes par répartition du secteur privé. Si l'on prend le taux de rendement interne comme proxy du « bien-être » des agents, alors l'abondement à un plan d'épargne procurerait une utilité moindre que celle procurée par la répartition. Le recours à la hausse des taux de cotisation des régimes par répartition plutôt qu'à l'épargne pour couvrir le risque retraite n'est pas pour autant une solution satisfaisante, car la hausse des cotisations accroît le coût du travail, encourage la substitution du capital au travail et dégrade le rendement du régime.



Quoi qu'il en soit, les résultats n'ont pas pour ambition d'évaluer les avantages et les limites des ajustements paramétriques possibles pour assurer l'équilibre financier des régimes. Les simulations sont focalisées avant tout sur la mesure du risque associé à l'utilisation des revenus du capital pour financer les retraites. En la matière, elles soulignent que les raisonnements simplistes consistant à comparer directement l'espérance des rendements des marchés financiers à celle des régimes par répartition pour en déduire une hiérarchie, comportent une faille majeure car ils font abstraction de la volatilité des marchés.

À cet égard, les stratégies d'allocation des investisseurs plus risquophiles montrent, sans surprise, que le marché pourrait concurrencer, voir supplanter, la rentabilité implicite des régimes par répartition au prix d'un investissement massif en actifs risqués en début et milieu de vie active. Cette prise de risque a naturellement un coût : les épargnants obtiendraient des rentes plus élevées au prix d'une dispersion accrue.

Enfin, on ne manquera pas de constater que les conditions de l'alignement entre le rendement de l'épargne retraite et le rendement de l'édifice des régimes par répartition, à savoir un investissement prépondérant en actifs risqués y compris pour les agents risquophobes, sont très loin des pratiques et de la culture des intermédiaires financiers. Reste à lever de manière cohérente et déterminée les obstacles à leur détention par les ménages (inadaptation de l'offre de conseil bancaire ou financier, fiscalité de l'épargne, réglementation prudentielle, *a priori* culturels...).

Ces conclusions restent naturellement fragiles. Pour les confirmer une prochaine étape consiste, d'une part, à faire l'exercice sur la base de chroniques débarrassées de biais, d'explorer les techniques alternatives de décomposition entre tendance et cycle et d'imaginer un modèle de choix de portefeuille (exogène) plus élaboré.

## Références

- Arrondel L., et A. Masson, 2016, « Les épargnants français dans la Grande Récession », *Préférences, anticipations et choix de portefeuille, document de travail*, Paris School of Economics.
- Arrondel L. et A. Masson, 2017, « La chute du taux d'actionnaires français depuis la crise : une énigme ? », *Opinions et débats*, n° 17, Labex-Louis Bachelier.

- Arrow K.J., 1962, « The Economic implications of Learning by Doing », *Review of Economic Studies*, n° 29, juin.
- Auerbach A. J., Gokhale J. et L. J. Kotlikoff, 1991, «Generational accounts : A meaningful alternative to deficit accounting», *Tax Policy and the Economy*, vol. 5, pp. 55-110.
- Auerbach A. et L. Kotlikoff, 1987, *Dynamic Fiscal Policy*, Londres, Cambridge University Press.
- Avouyi-Dovi S. et J. Matheron, 2003, « Interactions between business cycles, stock market cycles and interest rates: the stylised facts », *Financial Stability Review*, Banque de France, issue 3, pp. 80-99, novembre.
- Balvers R., Wu Y., et E. Gilliland, 2000, «Mean reversion across national stockmarkets and parametric contrarian investment strategies», *The Journal of Finance*, vol. 55, n° 2, pp. 745-772.
- Barberis N., 2000, « Investing for the long run when returns are predictable », *Journal of Finance*, 55, pp. 225-64.
- Blanchet D., 1992, « Retraites et croissance à long terme : un essai de simulation », *Économie et Prévision*, n° 105.
- Bodie Z., Merton R., et P. Samuelson, 1992, « Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Lifecycle Model », *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol.16, n° 3.
- Campbell J. Y., et L. M. Viceira, 2005, «The term structure of the risk-return trade-off», *Financial Analysts Journal*, vol. 61, n° 1, pp. 34-44.
- Carroll C. D., 1997, «Buffer-stock saving and the life cycle/permanent income hypothesis », *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 112, n° 1, p. 1.
- Cocco J. F., Gomes F. J., et P. J. Maenhout, 2005, «Consumption and portfolio choice over the life cycle», *The Review of Financial Studies*, vol. 18, n° 2.
- Damette O. et Z. Rabah, 2010, « La datation du cycle français : une approche probabiliste », *Revue française d'économie*, 24, pp. 135-163.
- De Laulanié J.-F., 2003, *Les placements de l'épargne à long terme*, 2<sup>e</sup> édition, Paris, Economica.
- Ducoudré B., Sampognaro R. et X. Timbeau, 2019, « Taux d'intérêt durablement bas et orientation de la politique budgétaire », *Revue de l'OFCE*, Presses de Sciences Po, n° 163, pp. 281-301.
- Dufourcq N., 1994, « L'état providence sélectif », *Notes de la fondation Saint-Simon*, avril.
- Fama E. F., 1965, «The behavior of stock-market prices», *The journal of Business*, vol. 38, n° 1, pp. 34-105.
- Hamayon S. et F. Legros, 2014, « Réforme des retraites 2013 : la contribution implicite du pouvoir d'achat des retraités », *Revue de l'OFCE*, n° 137.

- Kimball M. S., 1990, « Precautionary saving in the small and in the large », *Econometrica*, vol. 58, n° 1, pp. 53-73.
- Kimball M. S., 1993, « Standard risk aversion », *Econometrica*, vol. 61, n° 3, pp. 589-611.
- Lavigne A., 2010, « Etudier l'équité intergénérationnelle » in *La norme - Jacques Teboul*, pp. 168-184.
- Le Bris D. et P.C. Hautecoeur, 2010, « A challenge to the Triumphant Optimists, A Blue Chips Index for the Paris Stock Exchange (1854-2007) », *Financial History Review*, décembre, vol. 27, n° 2, pp. 141-183.
- Le Cacheux J. et V. Touzé, 2002, « Les modèles d'équilibre général calculable à générations imbriquées : enjeux, méthodes et résultats », *Revue de l'OFCE*, n° 80, janvier.
- Lockwood L. M., 2014, « Incidental bequests: Bequest motives and the choice to selfinsure late-life risks », *Working Paper*, n° 20745, National Bureau of Economic Research.
- Modigliani F. et R. H. Brumberg, 1954, « Utility Analysis and the Consumption Function: An Interpretation of Cross-Section Data ». In Kurihara, K. K., Ed., *Post-Keynesian Economics*, Rutgers University Press, New Brunswick, pp. 388-436.
- Nardi M. D., French E., et J. B. Jones, 2010, « Why do the elderly save? the role of medical expenses », *Journal of Political Economy*, vol. 118, n° 1, pp. 39-75.
- Poterba J. M. et L. H. Summers, 1988, « Mean reversion in stock prices: Evidence and implications », *Journal of financial economics*, vol. 22, n° 1, pp. 27-59.
- Pradat Y., 2017, *Retraite et risque financier*. Thèse de doctorat Economies et finances — Université Paris-Dauphine. PSL Research University.
- Romer P.M., 1986, « Increasing returns and Long-Run Growth », *Journal of Political Economy*, n° 94-5, octobre.
- Solow R., 1956, « A Contribution to the Theory of Economic Growth », *Quarterly Journal of Economics*, février.
- Spierdijk L., Bikker J. A. et P. van den Hoek, 2012, « Mean reversion in international stock markets: An empirical analysis of the 20th century », *Journal of International Money and Finance*, Vol. 31, n° 2, pp. 228-249.
- Stangeland D. A. et H. J. Turtle, 1999, « Time diversification: Fact or fallacy », *Journal of Financial Education*, pp. 1-13.

## ANNEXE

### Résultats synthétiques des simulations

Tableau A1. Hypothèse d'efficience des marchés

Rentes viagères – EMH				
<i>Hypothèse d'efficience des marchés (H1)</i>	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99 % rentes maximum	0,8 %	1,9 %	5,7 %	7,3 %
Profil 99 % rentes médianes	0,8 %	1,9 %	5,7 %	7,2 %
Profil 99 % rentes minimum	0,8 %	1,9 %	5,6 %	7,0 %
Profil 95 % rentes maximum	0,8 %	1,9 %	5,9 %	8,2 %
Profil 95 % rentes médianes	0,8 %	1,9 %	5,7 %	7,4 %
Profil 95 % rentes minimum	0,8 %	1,9 %	5,6 %	6,8 %
Profil 90 % rentes maximum	0,8 %	2,0 %	8,2 %	14,3 %
Profil 90 % rentes médianes	0,8 %	1,9 %	6,3 %	8,6 %
Profil 90 % rentes minimum	0,8 %	1,9 %	5,0 %	6,0 %
Rentes fc. du cumul de l'épargne	0,8 %	1,9 %	5,6 %	7,0 %
Taux de remp. + Rentes viagères – EMH				
Profil 99 % Taux maximum	59,6 %	56,3 %	55,9 %	55,4 %
Profil 99 % Taux médians	59,6 %	56,3 %	55,9 %	55,3 %
Profil 99 % Taux minimum	59,6 %	56,3 %	55,8 %	55,2 %
Profil 95 % Taux maximum	59,6 %	56,3 %	56,1 %	56,4 %
Profil 95 % Taux médians	59,6 %	56,3 %	55,9 %	55,6 %
Profil 95 % Taux minimum	59,6 %	56,3 %	55,8 %	55,0 %
Profil 90 % Taux maximum	59,6 %	56,4 %	58,4 %	62,4 %
Profil 90 % Taux médians	59,6 %	56,3 %	56,5 %	56,7 %
Profil 90 % Taux minimum	59,6 %	56,3 %	55,2 %	54,1 %
Taux de remp. de la répartition	58,8 %	54,4 %	50,2 %	48,2 %
TRI (H et F) : Répartition + épargne – EMH				
Profil 99 % TRI maximum	1,9 %	1,8 %	1,6 %	1,5 %
Profil 99 % TRI médians	1,9 %	1,8 %	1,6 %	1,5 %
Profil 99 % TRI minimum	1,9 %	1,8 %	1,6 %	1,5 %
Profil 95 % TRI maximum	1,9 %	1,8 %	1,6 %	1,6 %
Profil 95 % TRI médians	1,9 %	1,8 %	1,6 %	1,5 %
Profil 95 % TRI minimum	1,9 %	1,8 %	1,6 %	1,5 %
Profil 90 % TRI maximum	1,9 %	1,8 %	1,8 %	2,0 %
Profil 90 % TRI médians	1,9 %	1,8 %	1,7 %	1,6 %
Profil 90 % TRI minimum	1,9 %	1,8 %	1,6 %	1,4 %
TRI implicite de la répartition	1,9 %	1,8 %	1,7 %	1,6 %

Tableau A2. Hypothèse d'un retour vers une tendance déterministe

Rentes viagères – « Time-dependent OU Process »				
<i>Hypothèse d'un retour vers une tendance déterministe (H2)</i>	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
<b>Profil 99 % rentes maximum</b>	0,8 %	2,0 %	6,2 %	10,1 %
<b>Profil 99 % rentes médianes</b>	0,8 %	2,0 %	6,1 %	8,2 %
<b>Profil 99 % rentes minimum</b>	0,8 %	2,0 %	5,8 %	7,0 %
<b>Profil 95 % rentes maximum</b>	0,8 %	2,0 %	8,0 %	13,8 %
<b>Profil 95 % rentes médianes</b>	0,8 %	2,0 %	6,4 %	9,5 %
<b>Profil 95 % rentes minimum</b>	0,8 %	1,9 %	4,8 %	6,1 %
<b>Profil 90 % rentes maximum</b>	0,8 %	2,5 %	10,6 %	16,9 %
<b>Profil 90 % rentes médianes</b>	0,8 %	2,0 %	7,1 %	9,9 %
<b>Profil 90 % rentes minimum</b>	0,8 %	1,6 %	4,7 %	5,8 %
<b>Rentes fc. du cumul de l'épargne</b>	0,8 %	1,9 %	5,6 %	7,0 %
Taux de remp. + Rentes viagères – « Time dependent OU Process »				
<b>Profil 99 % Taux maximum</b>	59,6 %	56,4 %	56,4 %	58,3 %
<b>Profil 99 % Taux médians</b>	59,6 %	56,4 %	56,3 %	56,4 %
<b>Profil 99 % Taux minimum</b>	59,6 %	56,4 %	56,0 %	55,1 %
<b>Profil 95 % Taux maximum</b>	59,6 %	56,3 %	58,2 %	62,0 %
<b>Profil 95 % Taux médians</b>	59,6 %	56,3 %	56,6 %	57,7 %
<b>Profil 95 % Taux minimum</b>	59,6 %	56,3 %	55,0 %	54,3 %
<b>Profil 90 % Taux maximum</b>	59,6 %	56,9 %	60,8 %	65,1 %
<b>Profil 90 % Taux médians</b>	59,6 %	56,4 %	57,3 %	58,0 %
<b>Profil 90 % Taux minimum</b>	59,6 %	56,0 %	54,9 %	54,0 %
<b>Taux de remp. de la répartition</b>	58,8 %	54,4 %	50,2 %	48,2 %
TRI (H et F) : Répartition + épargne – « Time dependent OU Process »				
<b>Profil 99 % TRI maximum</b>	1,9 %	1,8 %	1,7 %	1,7 %
<b>Profil 99 % TRI médians</b>	1,9 %	1,8 %	1,7 %	1,6 %
<b>Profil 99 % TRI minimum</b>	1,9 %	1,8 %	1,6 %	1,5 %
<b>Profil 95 % TRI maximum</b>	1,9 %	1,8 %	1,8 %	1,9 %
<b>Profil 95 % TRI médians</b>	1,9 %	1,8 %	1,7 %	1,6 %
<b>Profil 95 % TRI minimum</b>	1,9 %	1,8 %	1,6 %	1,4 %
<b>Profil 90 % TRI maximum</b>	1,9 %	1,9 %	1,9 %	2,1 %
<b>Profil 90 % TRI médians</b>	1,9 %	1,8 %	1,7 %	1,6 %
<b>Profil 90 % TRI minimum</b>	1,9 %	1,8 %	1,6 %	1,4 %
<b>TRI implicite de la répartition</b>	1,9 %	1,8 %	1,7 %	1,6 %

Tableau A3. Bouclage avec croissance endogène

Rentes viagères – « fc. $K^1$ + T.dep. OU Process »				
Bouclage avec croissance endogène (H3)	Génération 1965	Génération 1975	Génération 1985	Génération 1995
Profil 99 % rentes maximum	0,8 %	2,1 %	6,5 %	10,8 %
Profil 99 % rentes médianes	0,8 %	2,1 %	6,3 %	8,8 %
Profil 99 % rentes minimum	0,8 %	2,1 %	6,1 %	7,3 %
Profil 95 % rentes maximum	0,8 %	2,1 %	8,6 %	15,6 %
Profil 95 % rentes médianes	0,8 %	2,1 %	6,7 %	10,3 %
Profil 95 % rentes minimum	0,8 %	2,0 %	5,0 %	6,4 %
Profil 90 % rentes maximum	0,8 %	2,6 %	11,4 %	20,8 %
Profil 90 % rentes médianes	0,8 %	2,1 %	7,6 %	11,9 %
Profil 90 % rentes minimum	0,8 %	1,8 %	4,7 %	5,9 %
Rentes fc. du cumul de l'épargne	0,8 %	1,9 %	5,6 %	7,0 %
Taux de remp.+ Rentes viagères – « fc. $K^1$ + T.dep. OU Process »				
Profil 99 % Taux maximum	59,6 %	56,4 %	56,7 %	59,0 %
Profil 99 % Taux médians	59,6 %	56,4 %	56,5 %	57,0 %
Profil 99 % Taux minimum	59,6 %	56,4 %	56,3 %	55,4 %
Profil 95 % Taux maximum	59,6 %	56,4 %	58,8 %	63,8 %
Profil 95 % Taux médians	59,6 %	56,4 %	56,9 %	58,5 %
Profil 95 % Taux minimum	59,6 %	56,4 %	55,2 %	54,6 %
Profil 90 % Taux maximum	59,6 %	57,0 %	61,6 %	69,0 %
Profil 90 % Taux médians	59,6 %	56,5 %	57,8 %	60,1 %
Profil 90 % Taux minimum	59,6 %	56,1 %	54,9 %	54,0 %
Taux de remp. de la répartition	58,8 %	54,4 %	50,2 %	48,2 %
TRI (H et F) : Répartition + épargne – « fc. $K^1$ + T.dep. OU Process »				
Profil 99 % TRI maximum	1,9 %	1,9 %	1,9 %	1,9 %
Profil 99 % TRI médians	1,9 %	1,9 %	1,9 %	1,8 %
Profil 99 % TRI minimum	1,9 %	1,9 %	1,8 %	1,7 %
Profil 95 % TRI maximum	1,9 %	1,9 %	2,0 %	2,2 %
Profil 95 % TRI médians	1,9 %	1,9 %	1,9 %	1,9 %
Profil 95 % TRI minimum	1,9 %	1,9 %	1,8 %	1,7 %
Profil 90 % TRI maximum	1,9 %	1,9 %	2,2 %	2,4 %
Profil 90 % TRI médians	1,9 %	1,9 %	1,9 %	1,9 %
Profil 90 % TRI minimum	1,9 %	1,9 %	1,8 %	1,7 %
TRI implicite de la répartition	1,9 %	1,8 %	1,7 %	1,6 %